

Zařízení sestává z jedné součástky s jistou životností. Předpokládejme, že její životnost popisuje náhodná veličina X a že tato veličina má spojité rozdělení pravděpodobnosti s hustotou f a distribuční funkcí F .

Bezporuchovost zařízení lze prodloužit tím, že po zvoleném čase t_p součástku pravidelně vyměňujeme za novou. Životnost k -té součástky popisuje náhodná veličina X_k opět s hustotou pravděpodobnosti f a distribuční funkcí F . Náhodné veličiny X_1, X_2, \dots považujeme za nezávislé.

Označme písmenem T náhodnou veličinu, která popisuje bezporuchovost zařízení při pravidelné obnově součástky. Odvodíme vztah pro hustotu pravděpodobnosti f_T a distribuční funkci F_T rozdělení této náhodné veličiny T , zejména nás pak bude zajímat střední hodnota ET .

Označme $p = P[X_k < t_p]$, $q = P[X_k \geq t_p] = 1 - p$ a $I = \int_0^{t_p} x f(x) dx$. Náhodnou veličinu T vyjádříme pomocí X_k následujícím způsobem

$$T = \begin{cases} X_1 & \text{jestliže } X_1 < t_p \\ t_p + X_2 & \text{jestliže } X_1 \geq t_p, X_2 < t_p \\ 2t_p + X_3 & \text{jestliže } X_1 \geq t_p, X_2 \geq t_p, X_3 < t_p \\ \dots\dots\dots & \\ kt_p + X_{k+1} & \text{jestliže } X_1 \geq t_p, X_2 \geq t_p, \dots, X_k \geq t_p, X_{k+1} < t_p. \end{cases}$$

Pro libovolné $x \in (0; \infty)$ platí vzhledem k nezávislosti X_1, X_2, \dots , podle definice distribuční funkce a věty o úplné pravděpodobnosti¹

$$\begin{aligned} F_T(x) &= P[T < x] = \\ &= P[T < x / X_1 < t_p] \cdot P[X_1 < t_p] + \\ &\quad + P[T < x / X_1 \geq t_p, X_2 < t_p] \cdot P[X_1 \geq t_p, X_2 < t_p] + \dots + \\ &\quad + P[T < x / X_1 \geq t_p, \dots, X_k \geq t_p, X_{k+1} < t_p] \cdot \\ &\quad \cdot P[X_1 \geq t_p, \dots, X_k \geq t_p, X_{k+1} < t_p] + \dots = \\ &= P[T < x / X_1 < t_p] \cdot p + P[T < x / X_1 \geq t_p, X_2 < t_p] \cdot pq + \dots + \\ &\quad + P[T < x / X_1 \geq t_p, \dots, X_k \geq t_p, X_{k+1} < t_p] \cdot pq^k + \dots \end{aligned}$$

Počítáme dále podle definice podmíněné pravděpodobnosti s ohledem na nezávislost X_1, X_2, \dots

$$\begin{aligned} &P[T < x / X_1 \geq t_p, \dots, X_k \geq t_p, X_{k+1} < t_p] = \\ &P[kt_p + X_{k+1} < x / X_1 \geq t_p, \dots, X_k \geq t_p, X_{k+1} < t_p] = \\ &= \frac{P[X_{k+1} < x - kt_p, X_1 \geq t_p, \dots, X_k \geq t_p, X_{k+1} < t_p]}{P[X_1 \geq t_p, \dots, X_k \geq t_p, X_{k+1} < t_p]} = \\ &= \frac{P[X_{k+1} < \min(x - kt_p, t_p)] \cdot q^k}{q^k \cdot p}. \end{aligned}$$

¹věta o úplné pravděpodobnosti: V pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{S}, P) platí pro náhodné jevy $A, B_1, B_2, \dots \in \mathcal{S}$ za předpokladů $\cup B_k = \Omega, B_k \cap B_l = \emptyset$ pro $k \neq l, P(B_k) \neq 0$ rovnost $P(A) = \sum P(A/B_k)P(B_k)$

Po dosazení do předchozího vztahu obdržíme

$$\begin{aligned} F_T(x) &= P[T < x] = \sum_{k=0}^{\infty} P[X_{k+1} < \min(x - kt_p, t_p)] \cdot q^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} F(\min(x - kt_p, t_p)) \cdot q^k \end{aligned}$$

Distribuční funkci F_T lze rozepsat po intervalech

$$F_T(x) = \begin{cases} F(x) & \text{na } (0; t_p) \\ F(t_p) + qF(x - t_p) & \text{na } (t_p; 2t_p) \\ F(t_p) + qF(t_p) + q^2F(x - 2t_p) & \text{na } (2t_p; 3t_p) \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Vzhledem ke spojitosti F_T obdržíme derivováním hustotu pravděpodobnosti f_T

$$f_T(x) = \begin{cases} f(x) & \text{na } (0; t_p) \\ qf(x - t_p) & \text{na } (t_p; 2t_p) \\ q^2f(x - 2t_p) & \text{na } (2t_p; 3t_p) \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Zbývá vypočítat střední hodnotu

$$\begin{aligned} ET &= \int_0^{\infty} xf_T(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kt_p}^{(k+1)t_p} q^k xf(x - kt_p) dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} q^k \int_0^{t_p} (x + kt_p) f(x) dx = \\ &= \left(\int_0^{t_p} xf(x) dx \right) \sum_{k=0}^{\infty} q^k + qt_p \left(\int_0^{t_p} f(x) dx \right) \sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1} \\ &= I \frac{1}{1-q} + pq t_p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{I + qt_p}{p}, \end{aligned}$$

(použili jsme vzorec pro součet geometrické řady $1 + q + q^2 + \dots + q^k + \dots = \frac{1}{1-q}$ a z něj derivováním odvozený vztah $1 + 2q + 3q^2 + \dots + kq^{k-1} + \dots = \frac{1}{(1-q)^2}$).

Integrál I lze upravit integrací po částech (per partes)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{t_p} xf(x) dx = t_p F(t_p) - \int_0^{t_p} F(x) dx \\ &= t_p p - t_p + \int_0^{t_p} R(x) dx = -qt_p + \int_0^{t_p} R(x) dx, \end{aligned}$$

kde $R(x) = 1 - F(x)$ je tzv. funkce přežití. Pro střední hodnotu pak obdržíme vztah

$$ET = \frac{1}{p} \int_0^{t_p} R(x) dx = \frac{\int_0^{t_p} R(x) dx}{1 - R(t_p)}.$$